Parcial. Primera fecha: 18 de mayo de 2018

Apellido y nombres:

Nro Padrón:

1	2	3	4	5	6	7	8

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4 ítems.

1. Decir si existen valores reales a, b y c tales que $f(z) = ax^3 + bxy^2 + i(cy^3 - 2yx^2)$ sea entera. Justificar.

2. Determinar una rama de $g(z) = \sqrt[3]{2z+1}$ tal que sea holomorfa sobre la curva $C = \{z \in C : |z| = 1, Im(z) \geqslant 0\}$, y que $g(0) = e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Calcular $\int_C g(z)dz$, tomando C con orientación positiva.

3. Hallar la imagen de $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < Arg(z) < \pi/4; |z| > 1\}$ por la transformación
$$T(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{z^4+1}\right)^2$$

4. Sea $u(x, y) = e^{\alpha x}h(y)$, con $\alpha \neq 0$. Hallar todas las funciones $h(y)$ tal que u sea armónica. Hallar una función entera $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $Re(f) = u$.

5. Dada
$$h(z) = \frac{Log(z+1) - z}{z^3(z+i)}$$
   (I) Hallar y clasificar las singularidades en el plano complejo ampliado.
   (II) Calcular $\int_C h(z)dz$, siendo C la elipse de ecuación $16x^2 + y^2 = 4$, orientada positivamente.

6. Hallar el desarrollo en potencias de z, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, de $G(z) = \frac{2z-1}{z^2+2}$, e indicar el dominio de convergencia.

7. Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definida para $|z| > 1$, expresar $\int_C (z^2 - 2z + 5)\frac{f(z)}{z^2}dz$ en términos de los coeficientes a_n, siendo C la circunferencia de radio R ($R > 1$) centrada en el origen, positivamente orientada.

8. Calcular $\int_C F(z)dz$, siendo C el polígono positivamente orientado de vértices 10+3i, -10+4i, -10-5i y 13-i; y siendo
$$F(z) = \frac{z^7(e^{1/z} + 1)}{(z+i)^8}$$

$\boxed{1}$ $f(x+iy) = \underbrace{ax^3+bxy^2}_{= u(x,y)} + i\underbrace{(cy^3-2yx^2)}_{= v(x,y)}$

$u, v \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ BASTA VERIFICAR LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN.

$u_x = 3ax^2+by^2$, $v_y = 3cy^2-2x^2$

$u_y = 2bxy$, $-v_x = 4xy$

POR LO TANTO:

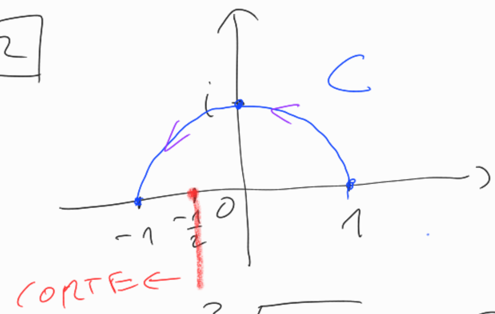
$u_x = v_y \Leftrightarrow 3ax^2+by^2 = 3cy^2-2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3a=-2 \\ b=3c \end{cases}$

$u_y = -v_x \Leftrightarrow 2bxy = 4xy \Leftrightarrow \boxed{b=2}$

JUNTANDO TODO OBTENEMOS

RTA: $\boxed{a=-\frac{2}{3}}$, $\boxed{b=2}$, $\boxed{c=\frac{2}{3}}$

$\boxed{2}$



$g(z) = \sqrt[3]{2z+1}$, $g(0) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

PUNTO DE RAMIFICACIÓN:

$z_0 /\ 2z_0+1=0$ $\boxed{z_0 = -\frac{1}{2}}$

$g(0) = \sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

TOMAMOS UNA RAMA DE $\sqrt[3]{z}$ TAL QUE $\sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ Y TENGA CORTE EN

$A = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}(z)=0,\ \operatorname{Im}(z)\leq 0\}$

$z = x+iy = (x,y) \Rightarrow g(z) = \sqrt[3]{2(x+iy)+1} = \sqrt[3]{\underline{2x+1}+iy}$

TIENE CORTE EN $2x+1=0 \wedge y\leq 0$.

$\boxed{x=-\frac{1}{2} \wedge y\leq 0}$ → CORTE DE g.

COMO $2\pi \in (\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi)$, DEFINIMOS

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg(z)}{3}}$, CON $\arg(z)\in(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi)$.

ENTONCES $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{|1|} \cdot e^{i\frac{\arg(1)}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ASÍ, $g(z) = \sqrt[3]{2z+1}$ CON ESTA RAMA DE $\sqrt[3]{z}$.

SEA $D = \mathbb{C} \setminus A$ EL DOMINIO DE HOLOMORFÍA DE g.

$\Rightarrow$ D ES SIMPLEMENTE CONEXO.

TOMAMOS UNA PRIMITIVA $G(z) = \frac{3}{8}(2z+1)^{\frac{4}{3}}$,

DONDE LA RAMA $z^{\frac{4}{3}}$ ESTÁ DEFINIDA CON $\arg(z) \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$.

ENTONCES, PODEMOS ESCRIBIR:

$$\int_C g(z)\,dz = G(-1) - G(1) = \frac{3}{8}(-1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{8} \cdot 3^{\frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{3}{8} \cdot e^{3\pi i \cdot \frac{4}{3}} - \frac{3}{8}\sqrt[3]{3^4} \cdot e^{i 2\pi \cdot \frac{4}{3}} = \frac{3}{8} - \frac{9}{8}\sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{8}{3}\pi} =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{9}{8}\sqrt[3]{3} \cdot e^{i\frac{9}{3}\pi} e^{-i\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{3}{8} + \frac{9}{8}\sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$$

OBSERVACIONES ADICIONALES:

$$\operatorname{Arg}(z) + \frac{5}{2}\pi \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right)$$

$$z = |z|\, e^{i\operatorname{Arg}(z)}$$

SEA

$$\theta = \operatorname{Arg}\left(z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right) + \frac{5}{2}\pi \in \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$$

$$|z| e^{i\theta} = \left|z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right| \cdot e^{i\left(\operatorname{Arg}\left(z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right) + \frac{5}{2}\pi\right)} =$$

$$= \underbrace{\left|z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right| e^{i\operatorname{Arg}\left(z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right)}} \cdot e^{i\frac{5}{2}\pi} =$$

$$= \underline{z e^{-i\frac{5}{2}\pi}} \cdot e^{i\frac{5}{2}\pi} = z.$$

$$\therefore \quad \underline{\theta = \arg(z) \in \left(\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\arg(z) = \operatorname{Arg}\left(z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right) + \frac{5}{2}\pi}$$

$$\therefore\ \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}\; e^{\,i\frac{\left(\mathrm{Arg}\left(z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right)+\frac{5}{2}\pi\right)}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\left|z\cdot e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right|}\cdot e^{\,i\frac{\mathrm{Arg}\left(z e^{-i\frac{5}{2}\pi}\right)}{3}}\cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} =$$

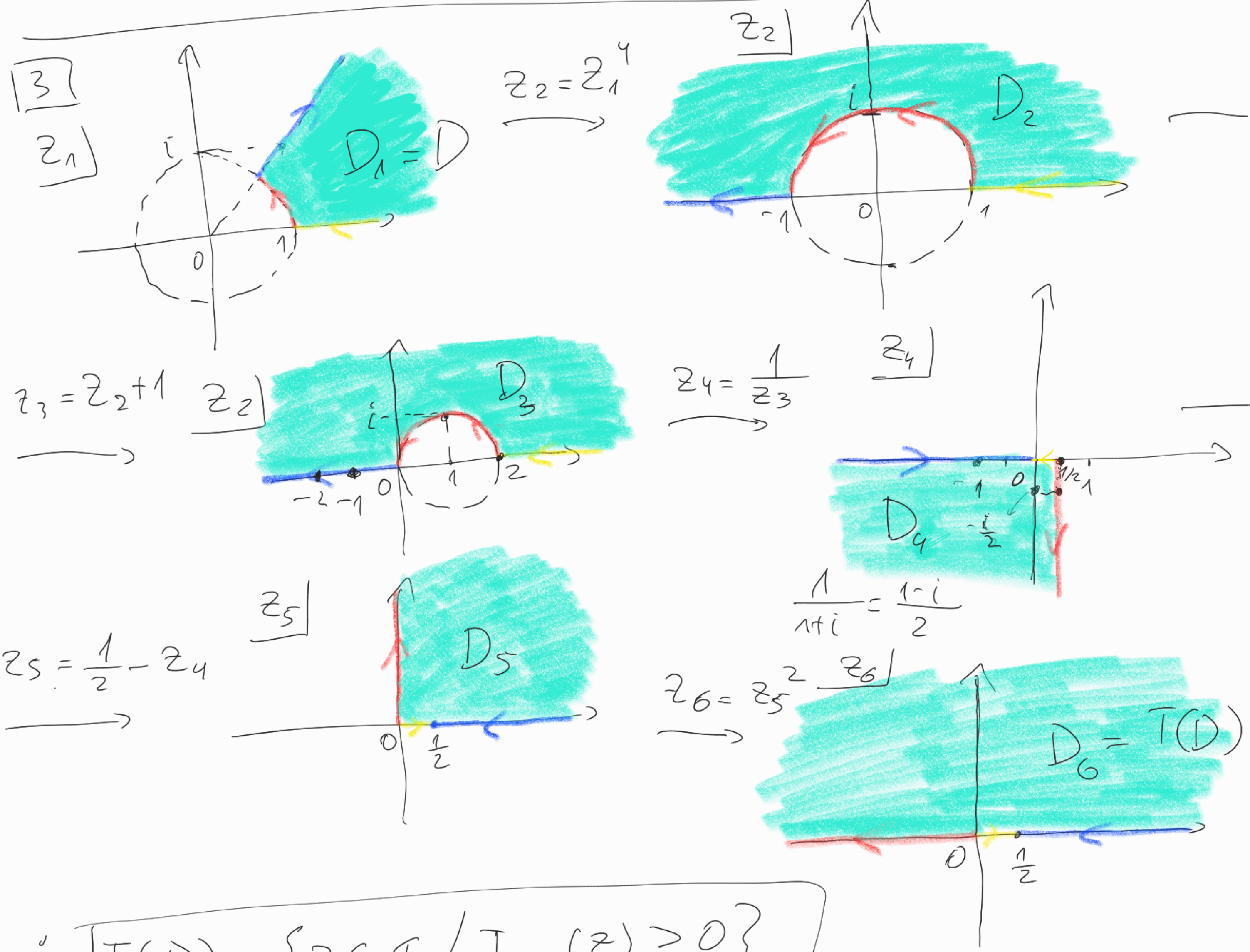
$$= \sqrt[3]{z\, e^{-i\frac{5}{2}\pi}}\cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} = \sqrt[3]{-iz}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$$

RAMA PRINCIPAL

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{e^{-i\frac{5}{2}\pi}}\cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} = \sqrt[3]{e^{-i\frac{\pi}{2}}}\cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} = e^{-i\frac{\pi}{6}}\cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} =$$

$$= e^{i\frac{4}{6}\pi} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$\boxed{3}$



$$\therefore\ \boxed{T(D) = \{z\in\mathbb{C} \,/\, \mathrm{Im}(z) > 0\}}$$

$\boxed{5}$ $U(x,y) = e^{\alpha x} h(y)$, $\alpha \neq 0$

$h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ PORQUE f ES ARMÓNICA.

$$\nabla^2 U(x,y) = \alpha^2 e^{\alpha x} h(y) + e^{\alpha x} h''(y) = 0 \iff$$

$$\iff \alpha^2 h(y) + h''(y) = 0 \iff \boxed{h(y) = A\cos(\alpha y) + B\sin(\alpha y), \text{ CON } A, B \in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow U(x,y) = A e^{\alpha x}\cos(\alpha y) + B e^{\alpha x}\sin(\alpha y) =$$

$$= A\,\mathrm{Re}\left(e^{\alpha(x+iy)}\right) + B\,\mathrm{Re}\left(-i\,e^{\alpha(x+iy)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left((A-iB)\,e^{\alpha(x+iy)}\right) \underset{z = x+iy}{=} \mathrm{Re}\left((A-iB)\,e^{\alpha z}\right)$$

$\boxed{\text{TOMAMOS } f(z) = (A-iB)\,e^{\alpha z}}$ ///

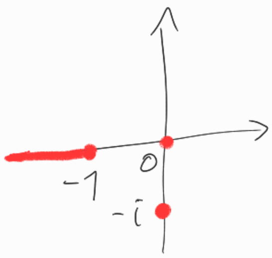
$\boxed{6}$ $h(z) = \dfrac{\mathrm{Log}(z+1) - z}{z^3(z+i)}$

(I) <u>SINGULARIDADES</u>:

- $z = 0$
- $z = -i$

$\longrightarrow$ SINGULARIDADES AISLADAS.

- $z = x + 0i \;/\; x \in \mathbb{R},\ x \leq -1$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{SINGULARIDADES NO AISLADAS.}}$
- $z = \infty$



- <u>$z = -i$</u>: $\longrightarrow$ ES CERO SIMPLE DE $z^3(z+i)$.

  $\hookrightarrow$ $\mathrm{Log}(-i+1) + i \neq 0$ PORQUE $1 - i \neq e^{-i}$. (COMPARAR MÓDULOS)

  $\boxed{\therefore\ z = -i \text{ ES POLO SIMPLE}}$

- <u>$z = 0$</u>: $\longrightarrow$ ES CERO TRIPLE DE $z^3(z+i)$.

  $\hookrightarrow$ ES CERO DE $g(z) = \mathrm{Log}(z+1) - z$.

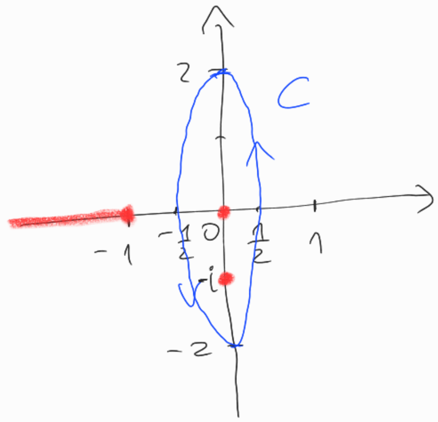
  $g'(z) = \dfrac{1}{z+1} - 1 \Rightarrow g'(0) = 0$

  $g''(z) = \dfrac{-1}{(z+1)^2} \Rightarrow g''(0) = -1 \neq 0$

$\therefore\ z=0$ ES CERO DOBLE DE $g(z)=\mathrm{Log}(z+1)-z$.

$$\boxed{\therefore\ z=0 \text{ ES POLO SIMPLE DE } h}$$

(II) $C:\ \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1 \quad (+)$



$$\int_C h(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(h,0)+\mathrm{Res}(h,-i)\right)$$

$$\mathrm{Res}(h,0)=\lim_{z\to 0} z\,h(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Log}(z+1)-z}{z^2(z+i)} \overset{L'H}{=}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{z+1}-1}{3z^2+2zi} \overset{L'H}{=} \lim_{z\to 0}\frac{\frac{-1}{(z+1)^2}}{6z+2i}=\frac{-1}{2i}=\frac{i}{2}$$

$$\mathrm{Res}(h,-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)\,h(z)=\lim_{z\to -i}\frac{\mathrm{Log}(z+1)-z}{z^2}=$$

$$=\frac{\mathrm{Log}(1-i)+i}{-1}=\frac{\ln(\sqrt{2})-i\frac{\pi}{4}+i}{-1}=-\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{3}{4}\pi i$$

$$\therefore \int_C h(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{i}{2}-\frac{1}{2}\ln(2)-\frac{3}{4}\pi i\right)=$$

$$=-\pi-i\pi\ln(2)+\frac{3}{2}\pi=\boxed{\frac{\pi}{2}-i\pi\ln(2)}$$

$\boxed{6}$ $$G(z)=\frac{2z-1}{z^2+2}=\frac{2z-1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z^2}{2}}=$$

$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{2}\right)}=\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z^2}{2}\right)^k=$$

SI $|z|<\sqrt{2}$

$$=\left(z-\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{2^k}=\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2^k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} z^{2k}}{2^{k+1}}}$$

$K \in \mathbb{N}_0$

m PAR $\Rightarrow m = 2k \Rightarrow k = \frac{m}{2}$

m IMPAR $\Rightarrow m = 2k+1 \Rightarrow k = \frac{m-1}{2} \Rightarrow k+1 = \frac{m+1}{2}$

AMBOS CASOS: $\dfrac{2m+1+(-1)^{m+1}}{4} = \begin{cases} \frac{m}{2}, & m \text{ PAR} \\ \frac{m+1}{2}, & m \text{ IMPAR} \end{cases}$

$$\therefore \boxed{G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2m+1+(-1)^{m+1}}{4}} \cdot z^m, \quad |z| < \sqrt{2}}$$

$\boxed{7}$ $$\int_C \underbrace{(z^2-2z+5)\frac{f(z)}{z^2}}_{g(z)} dz = -2\pi i \operatorname{Res}(g,\infty)$$

$g(z) \to$ TIENE SINGULARIDAD AISLADA EN ∞.

$$g(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} b_m \cdot z^m, \quad |z| > R \Rightarrow \operatorname{Res}(g,\infty) = -b_{-1}$$

$$\therefore \int_C g(z)\, dz = 2\pi i\, b_{-1}$$

$$g(z) = f(z) - 2\frac{f(z)}{z} + 5\frac{f(z)}{z^2}$$

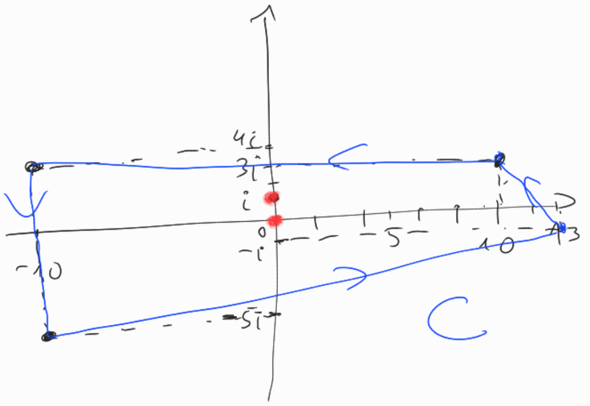
$$g(z) = \sum_{m\geq 0} a_m z^m + \sum_{m\geq 0} -2a_m z^{m-1} + \sum_{k\geq 0} 5 a_k z^{k-2}$$

TOMANDO $m=0$ Y $k=1$, OBTENEMOS

$b_{-1} = -2a_0 + 5a_1$.

$$\therefore \boxed{\int_C \left(z^2-2z+\frac{5}{z^2}\right) f(z)\, dz = 2\pi i (5a_1 - 2a_0)}$$

$\boxed{8}$ $$F(z) = \frac{z^7(e^{1/z}+1)}{(z+i)^8}$$



SINGULARIDADES:

- $z=0$
- $z=-i$

$$\int_C F(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(F,\infty).$$

$$\operatorname{Res}(F,\infty) = \operatorname{Res}\Big(\underbrace{-\frac{1}{z^2}F\left(\frac{1}{z}\right)}_{=H(z)};0\Big) = \operatorname{Res}(H,0)$$

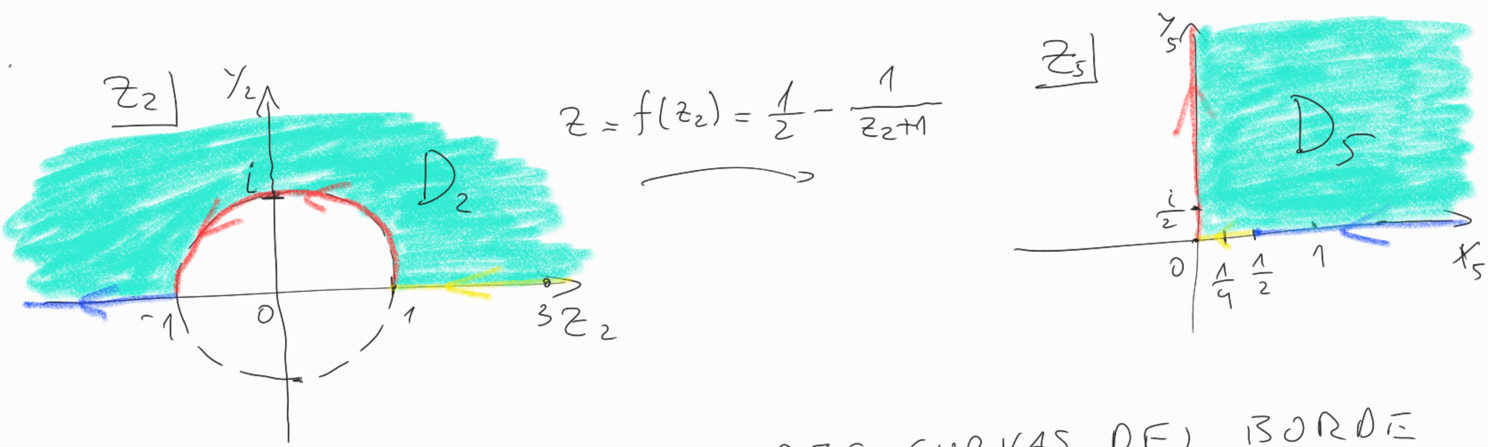
$$H(z) = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{e^z+1}{z^7\left(\frac{1}{z}+i\right)^8} = -\frac{e^z+1}{z(1+iz)^8}$$ $\rightarrow$ TIENE POLO SIMPLE EN $z=0$.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(H,0) = \lim_{z\to 0} zH(z) = -2 \Rightarrow \operatorname{Res}(F,\infty) = -2$$

$$\therefore \boxed{\int_C F(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(F,\infty) = -4\pi i}$$

//.

OBSERVACIÓN SOBRE EL EJERCICIO 3:



f ES MOMOGRÁFICA, LAS TRES CURVAS DEL BORDE ESTÁN CONTENIDAS EN CIRCONFERENCIAS O RECTAS QUE PASAN POR -1. COMO $f(-1)=\infty$, LAS TRES CURVAS SE TRANSFORMAN EN TRAMOS DE RECTAS.

CALCULAMOS f EN ALGUNOS PUNTOS CONVENIENTES Y DETERMINAMOS LAS CURVAS TRANSFORMADAS.

$$f(\infty)=\frac{1}{2}, \quad f(3)=\frac{1}{4}, \quad f(1)=0$$

$$f(1)=0, \quad f(i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{i+1}=\frac{1}{2}-\frac{1-i}{2}=\frac{i}{2}, \quad f(-1)=\infty$$

$$f(-1)=\infty, \quad f(-2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{-2+1}=\frac{3}{2}, \quad f(\infty)=\frac{1}{2}$$

USANDO QUE f ES CONFORME Y LA ORIENTACIÓN, SE DETERMINA $D_5=f(D_2)$. ESTE PASO ABREVIA LA SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 3.